

4-й выпускъ 8-го тома
собранія протоколовъ
секціи физико-матема-
тическихъ наукъ въ Ка-
зани (засѣданія 93, 94
и 95-ое).

Протоколъ 93-го засѣданія

25 Ноября 1889 года.

(Въ засѣданіи присутствовало 20 членовъ и около 20 постороннихъ лицъ).

I. Единогласно приняты въ члены секціи по предложе-
женію А. В. Васильева, Д. И. Дубяго, И. П. Долбни, А. П.
Павлова, М. С. Сегеля, Н. П. Слугинова:

179) *Жарковъ*, Николай Николаевичъ, военный инже-
неръ въ Казани.

180) *Сикстель*, Владиміръ Александровичъ, преподава-
тель Оренбургскаго Неплюевского Кадетскаго Корпуса.

181) *Оедоровъ*, Поліевктъ Оеодоровичъ, учитель Красно-
ярской гимназіи.

182) *Чеховичъ*, Карлъ Андреевичъ, окружный инспек-
торъ Оренбургскаго учебнаго округа.

II. Предсѣдатель секціи доложилъ сообщеніе *И. А.
Клейбера*: „о наилучшей ординатѣ въ интерполированіи по
способу наименьшихъ квадратовъ“. Сообщеніе печатается
въ приложеніи къ протоколамъ.

III. *Д. А. Гольдгаммеръ* сдѣлалъ сообщеніе „о между-
народномъ конгрессѣ электриковъ въ Парижѣ“.

Предсѣдатель секціи *А. Васильевъ*.

Секретарь секціи *М. Сегель*.

Протоколъ 95-го засѣданія

27 Января 1890 года.

Въ засѣданіи присутствовали 20 членовъ и около 20 постороннихъ лицъ:

I. По предложенію А. В. Васильева, Д. И. Дубяго, И. П. Долбни, Н. В. Нечаева, М. С. Сегеля, Н. П. Слугинова единогласно избраны въ члены секціи:

183) *Шиффъ, Вѣра Осиповна*, преподавательница математики на высшихъ женскихъ курсахъ въ С.-Петербургѣ.

184) *Пташицкій, Иванъ Львовичъ*, приватъ-доцентъ математики въ С.-Петербургскомъ университетѣ.

185) *Селивановъ, Дмитрій Ѳедоровичъ*, приватъ-доцентъ математики въ С.-Петербургскомъ университетѣ.

186) *Кларкъ, Николай Ивановичъ*, преподаватель математики въ Нижне-Тагильскомъ реальномъ училищѣ.

187) *Кадомцевъ, Петръ Васильевичъ*, преподаватель математики въ Новгородскомъ реальномъ училищѣ.

188) *Перуанскій, Константинъ Аѳанасьевичъ*, преподаватель математики въ Сызранскомъ реальномъ училищѣ.

189) *Толузаковъ, Василій Васильевичъ*, преподаватель математики въ Оренбургской мужской гимназій.

190) *Соколовъ, Дмитрій Михайловичъ*, инженеръ института путей сообщенія.

191) *Щепанскій, Іосифъ Александровичъ*, преподаватель Самарскаго реального училища.

192) *Казинъ, Борисъ Ниловичъ*, кандидатъ математики, инженеръ путей сообщенія.

193) *Кремлевъ, Александръ Николаевичъ*, кандидатъ физико-математическаго факультета.

II. Предсѣдатель секціи доложилъ о полученномъ отъ Гамбургскаго математическаго общества приглашеніи при-

нять участіе въ имѣющемъ состояться $\frac{3}{15}$ февраля 1890 г. празднованіи его двухсотлѣтняго существованія. Гамбургское математическое общество прислало вмѣстѣ съ тѣмъ изданное по поводу юбилея сочиненіе. Одинъ выпускъ этой „Festschrift“ представляетъ историческую записку о существованіи общества, изъ которой видно, что общество основано было Гейнрихомъ Мейснеромъ въ 1690 г. и представляетъ поэтому послѣ Leopoldinisch — Carolinische Akademie der Naturforscher und Aerzte, основанной въ 1652, старѣйшее научное общество Германіи. Осматривая свое двухсотлѣтнее существованіе, общество признаетъ своею главною заслугою поддержку и возбужденіе научнаго духа въ мѣстныхъ учителяхъ. „Какъ много учителей, подававшихъ студентами большія надежды, говоритъ совершенно справедливо историческая записка, теряли-бы безъ подобныхъ мѣстныхъ ученыхъ обществъ въ научной изолированности и въ тяжелой педагогической дѣятельности тотъ полетъ духа, безъ котораго невозможны ни научныя изслѣдованія, ни плодотворная педагогическая дѣятельность“.

Первоначально Гамбургское общество носило названіе Kunstrechnungslieb—und übende Societät и заключало въ своей средѣ при основаніи 6 гамбургскихъ и 9 иногороднихъ членовъ. Вскорѣ оно получило привилегію на изданіе сочиненій, которою и воспользовалось для изданія многихъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ сочиненій своего основателя Гейнриха Мейснера. Историкъ общества раздѣляетъ исторію общества съ 1720 г. по настоящее время на три періода. Въ первомъ періодѣ (1720—1790) вниманіе членовъ общества было направлено на развитіе техники ариѳметическаго счета и бухгалтеріи, что объясняется конечно важнымъ коммерческимъ значеніемъ Гамбурга. Во второмъ періодѣ подъ вліяніемъ знаменитаго Репсольда математическое

общество интересовалось преимущественно вопросами техники и инженерного искусства. Съ 1860 г. въ общество вступили членами многіе учителя математики и придали ему преимущественно педагогическій и научный характеръ. Въ настоящее время общество состоитъ изъ 53 членовъ, большинство которыхъ учителя математики. Работы этихъ членовъ, а также присланныя Кронекеромъ, Канторомъ, Нетто, Рейе и другими научныя сообщенія составляютъ вторую часть Fest-schrift, присланной въ нашу секцію.

Секція постановила поздравить телеграммою Гамбургское математическое общество въ день его двухсотлѣтняго юбилея.

III. *Н. А. Толмачевъ* предложилъ послать отъ имени секціи поздравленіе физическому обществу въ Кенигсбергѣ (Physikalisch-ökonomische Gesellschaft) съ 100 лѣтнимъ юбилеемъ, который общество предполагаетъ праздновать $22/10$ Февраля сего года. Постановлено поздравить общество письмомъ.

IV. Доложено о поступившихъ съ послѣдняго засѣданія книгахъ:

1) Отъ О. Д. Хвольсона получены его сочиненія:

- 1) О механизмѣ магнитной индукціи въ стали. Спб. 76 г.
- 2) О формулѣ $P=MG$. Кіевъ, 88 г.
- 3) О выводѣ второй теоремы Кирхгофа.
- 4) Приборъ для демонстрированія внутренней и внѣшней теплопроводности.
- 5) О вліяніи растяженія на электрическое сопротивленіе мѣдныхъ и латунныхъ проволокъ.
- 6) Популярныя лекціи объ основныхъ гипотезахъ физики. Спб., 87 г.
- 7) О поляризаціонномъ фотометрѣ Г. Вильда. Спб. 87 г.
- 8) Объ абсолютныхъ единицахъ, въ особенности магнитныхъ и электрическихъ. Спб. 87 г.
- 9) Ueber die Wechselwirkung zweier Magnete mit Berücksichtigung ihrer Querdimensionen.

10) Третья С.-Петербургская электрич. выставка. Спб. 86 г.

11) Photometrische Untersuchungen über die innere Diffusion des Lichtes.

12) Отчего perpetuum mobile невозможно.

13) О магнитныхъ успокоителяхъ. Спб. 80 г.

2) Отъ И. Н. Аристова получены въ подарокъ слѣдующія книги:

1) *Jamin*. Cours de Physique t—I, 58 г.

Paris, t—II, 59 г.

t—III, 66 г.

t—IV—Electricité dynamique.

2) Андреевъ. Низшая геодезія. Спб. 75 г.

3) Салмонъ. Коническія сѣченія. Спб. 60 г.

4) Беренсъ. Дифференц. исчисленіе.

3) Отъ Пулковской обсерваторіи получены:

1) Hasselberg. Untersuchungen über das Absorptionsspectrum des Jodgases. Спб. 89 г.

2) Lindemann. Photometrische Bestimmung der Grössenclassen der Bonner Durchmusterung. Спб. 89.

3) Къ 50 лѣтію Николаевской главной астрономич. обсерваторіи.

4) Schiaparelli. De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques. Memoire présenté à l'observatoire de Poulkova.

Постановлено благодарить жертвователей.

V. Секретарь секціи сообщилъ о полученномъ отъ директора астрономической обсерваторіи Казанскаго университета Д. И. Дубяго письмѣ, въ которомъ послѣдній отъ имени обсерваторіи благодарить секцію за присланный ею въ бібліотеку обсерваторіи полный экземпляръ трудовъ секціи.

VI. Н. П. Слугиновъ сдѣлалъ сообщеніе: „о звукопроводности“, въ которомъ, изложивъ элементарный выводъ формуль Бозанке, выражающей зависимость энергіи звуковой волны отъ плотности, амплитуды, длины волны и скорости распространенія, сообщилъ приложенія ея къ явленіямъ звукопроводности.

VII. *И. И. Земинский* сдѣлалъ сообщеніе: „объ интегралѣ уравненія Рикатти“.

VIII. Прочитано сообщеніе *О. Д. Хвольсона*: „Объ одномъ частномъ случаѣ переменнаго тепловаго состоянія стержня“. Сообщеніе печатается въ приложеніи къ протоколамъ.

IX. Предсѣдатель секціи доложилъ сообщеніе *И. П. Долбни*: „О псевдо-эллиптическихъ интегралахъ Абеля“. Сообщеніе печатается въ приложеніи къ протоколамъ.

X. *К. И. Котеловъ* показалъ 1) приборъ, устроенный механикомъ Шпренгеромъ, для изслѣдованія распредѣленія магнетизма въ магнитѣ, 2) гальванометръ д'Арсонваля, 3) тахометръ Buss und Sombart.

Н. П. Слугиновъ 1) демонстрировалъ горѣлку, устроенную по Маху, могущую за отсутствіемъ свѣтильнаго газа замѣнить манометрическую камеру Кёнига. 2) Далѣе онъ произвелъ нѣсколько опытовъ съ электроскопами и электрометромъ Кольбе, при чемъ источникомъ электричества служила стеклянная палка, натертая шелкомъ, покрытымъ порошкомъ алюминія. Производя опыты по статическому электричеству, докладчикъ случайно подмѣтилъ способность алюминіева порошка сильно электризовать стекло. Объ этой способности можно судить по слѣдующимъ фактамъ: при треніи слышенъ трескъ и замѣчается озонизація; если натираніе производится въ темнотѣ, то замѣчаются вдоль палки длинныя искры до 4 см.; если натираніе производится вблизи проводниковъ, то искры перескакиваютъ на нихъ; послѣ нѣсколькихъ натираній палка очень сильно нагрѣвается.

Н. П. Слугиновъ и *К. В. Кебель* демонстрировали: 1) эолипиль Покелена и 2) углекислоту въ твердомъ состояніи.

Предсѣдатель секціи *А. Васильевъ*.

Секретарь секціи *М. Сегель*.

О ПСЕВДО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛАХЪ АБЕЛЯ.

И. П. Долбни.

(Сообщеніе, прочитанное 27 Января 1890 г. въ засѣданіи физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Казан. Университетѣ).

§ I.

Псевдо-эллиптическими интегралами Günther называетъ такіе интегралы, которые, обладая наружными признаками эллиптическихъ, могутъ быть выражены, въ конечномъ видѣ, алгебраическими и логарифмическими функціями ⁽¹⁾. Это удачное названіе употребляется, въ настоящее время, многими писателями ⁽²⁾.

Абелевыми псевдо-эллиптическими интегралами мы будемъ называть интегралы вида

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}} \cdot \cdot \cdot \quad (1),$$

если эти послѣдніе выражаются посредствомъ логарифмовъ. Вопросъ о выразимости интеграловъ (1) посредствомъ логарифмовъ поставленъ, какъ извѣстно, на новую почву Чебышевымъ; покойный Е. И. Золотаревъ развилъ идеи Чебышева

⁽¹⁾ Bulletin de la Soc. math. de France, t. X, p. 88, 1882.

⁽²⁾ G. Halphen, «Traité des fonctions elliptique», 1888.

въ своемъ сочиненіи „Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ“, а также въ статьѣ „Sur la méthode d'intégration de M. Tchebycheff“, напечатанной въ журналѣ Ліувилля 1874 г.

Этому же вопросу посвящено два сочиненія г. И. Птащикаго, изъ коихъ первое издано въ 1881, а второе въ 1888. Не смотря на всѣ достоинства изслѣдованій Золотарева, слѣдуетъ замѣтить, что работы его не отличаются надлежащею простотою, а потому не могутъ быть признаны совершенными въ педагогическомъ отношеніи. Сложность выкладки Е. И. Золотарева и нѣкоторая искусственность его приѣмовъ объясняются тѣмъ обстоятельствомъ, что покойный авторъ пользовался старыми эллиптическими функціями, при помощи которыхъ обращеніе эллиптическихъ интеграловъ достигается съ большими трудностями. Извѣстно, какое значеніе для анализа имѣетъ современная новая теорія эллиптическихъ функцій Вейерштрасса. Важность новыхъ эллиптическихъ функцій $p(u)$ и $\wp(u)$ постигается, съ совершенною очевидностію, въ тѣхъ случаяхъ, когда производится обращеніе эллиптическаго интеграла. Пользуясь функціями Вейерштрасса можно рѣшить вопросъ о принадлежности интеграла (1) въ категоріи псевдо-эллиптическихъ съ чрезвычайною простотою и ясностію. Мы начнемъ съ обращенія эллиптическихъ интеграловъ.

§ II.

Дается полиномъ

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 \quad (2)$$

Задача, называемая обращеніемъ эллиптическихъ интеграловъ, заключается, какъ извѣстно, въ томъ, чтобы выразить переменную x и $\sqrt{X}$ эллиптическими функціями одного

и того-же аргумента. Всякій полиномъ (2), посредствомъ подстановки

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \xi,$$

приводится къ виду

$$X = a_0 (\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4) = a_0 \Psi,$$

гдѣ

$$\alpha_2 = \frac{a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2}, \quad \alpha_3 = \frac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3} \dots \dots (3).$$

Извлекая квадратный корень изъ Ψ , найдемъ, что цѣлая часть корня будетъ

$$\xi^2 + 3\alpha_2,$$

такъ что

$$\Psi = (\xi^2 + 3\alpha_2)^2 + (4\alpha_3 \xi + \alpha_4 - 9\alpha_2^2).$$

Положимъ

$$\sqrt{\Psi} = \xi^2 + 3\alpha_2 - \frac{2}{x_1} \dots \dots \dots (4)$$

Уничтожая радикаль и знаменателя въ этомъ уравненіи, приведемъ его къ двумъ слѣдующимъ видамъ

$$\left. \begin{aligned} (4\alpha_3 \xi + \alpha_4 - 9\alpha_2^2)x_1^2 + 4(\xi^2 + 3\alpha_2)x_1 - 4 &= 0, \\ 4x_1 \xi^2 + 4\alpha_3 x_1^2 \xi + (\alpha_4 - 9\alpha_2^2)x_1^2 + 12\alpha_2 x_1 - 4 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ

$$x_1 = -\frac{2(\xi^2 + 3\alpha_2) \pm 2\sqrt{\Psi}}{4\alpha_3 \xi + \alpha_4 - 9\alpha_2^2},$$

$$\xi = -\frac{\alpha_3 x_1^2 \pm \sqrt{\alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1}}{2x_1}, \text{ или}$$

$$\xi = -\frac{\alpha_3 x_1^2 \pm \sqrt{X_1}}{2x_1}.$$

Извѣстно, что, если переменныя связаны между собою уравн. (5), то

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \quad (2)$$

Взявъ $\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$, положимъ $x_1 = \frac{1}{z + \alpha_2}$,

тогда $\sqrt{X_1} = \frac{1}{(z + \alpha_2)^2} \sqrt{4z^3 - (3\alpha_2^2 + \alpha_4)z - (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2)}$,

$$\partial x_1 = - \frac{\partial z}{(z + \alpha_2)^2}.$$

Для надлежащія подстановки, получимъ

$$\frac{\partial \xi}{\sqrt{\Psi}} = \frac{\partial x_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{-\partial z}{\sqrt{4z^3 - (3\alpha_2^2 + \alpha_4)z - (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2)}}$$

Полагая

$$g_2 = 3\alpha_2^2 + \alpha_4, g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2, - \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = u,$$

получимъ

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{\partial x_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} du,$$

$$z = p(u, g_2, g_3), - \sqrt{4z^3 - g_2z - g_3} = p'(u, g_2, g_3).$$

Положимъ, согласно Halphen'у (3), $\alpha_2 = -p(v, g_2, g_3)$; тогда $p'v = \alpha_3$. Вслѣдствіе этого

$$x_1 = \frac{1}{pu - pv}, \sqrt{X_1} = \frac{-p'u}{(pu - pv)^2},$$

$$\xi = \frac{-p'v}{2(pu - pv)} + \frac{p'u}{2(pu - pv)} = \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

(2) Halphen, «Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications», 1888; t. 2, p. 333—334.

(3) Ibid; t. 1, p. 120.

а потому

$$\sqrt{\Psi} = \frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 - 3pv - 2pu + 2pv.$$

Но по формулѣ сложенія эллиптическихъ аргументовъ

$$\frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 = p(u + v) + p(u) + p(v),$$

слѣдовательно

$$\sqrt{\Psi} = p(u + v) - p(u),$$

$$\sqrt{X} = \sqrt{a_0} \{ p(u + v) - pu \},$$

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

Инварианты g_2 и g_3 выразятся въ функціи коэффициентовъ полинома X слѣдующимъ образомъ:

$$g_2 = \frac{1}{a_0^2} \{ a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 \},$$

$$g_3 = \frac{1}{a_0^3} \{ a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 - a_1 a_4 \}.$$

§ III.

Имѣемъ

$$\sqrt{X} = \sqrt{a_0} \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4} = \sqrt{a_0} \sqrt{\Psi}$$

Полагаемъ

$$\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4} = \xi^2 + \alpha_2 - 2z.$$

Уничтожая здѣсь радикалъ, дадимъ уравненію двѣ формы

$$4(\alpha_1 + z)\xi^2 + 4\alpha_3 \xi - (4z^2 - 4\alpha_2 z + \alpha_2^2 - \alpha_4) = 0. \quad (6),$$

$$4z^2 - 4(\alpha_1 + \xi^2)z - (4\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi - \alpha_2^2 + \alpha_4) = 0. \quad (7).$$

Рѣшая (6) и (7), имѣемъ

$$\xi = - \frac{\alpha_3 \pm \sqrt{4z^3 - (3\alpha_2^2 + \alpha_4)z - (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3)}}{2(z + \alpha_2)},$$

$$z = \frac{\alpha_2 + \xi^2 \pm \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}}{2};$$

слѣдовательно

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \frac{-dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

гдѣ g_2 и g_3 суть инварианты эллиптическаго аргумента

$$u = - \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}.$$

Полагая

$$\alpha_2 = -p\nu, \quad \alpha_3 = p'\nu,$$

получимъ

$$\xi = \frac{p'u - p'\nu}{2(pu - p\nu)},$$

$$x = - \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu},$$

$$\sqrt{X} = \sqrt{a_0} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu} \right)^2 - p\nu - 2pu \right\},$$

или

$$\sqrt{X} = \sqrt{a_0} \{ p(u + \nu) - pu \},$$

что согласуется вполнѣ съ выше найденными результатами. Инверсія сдѣлана независимо отъ свойства корней даннаго многочлена X .

6-19

имѣемъ

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \int \left[\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v + H - \frac{a_1}{a_0} \right] du,$$

или

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} + \left(H - \frac{a_1}{a_0} - \zeta v \right) u \quad (^5).$$

Полагая

$$H - \frac{a_1}{a_0} - \zeta(v) = J,$$

получимъ

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \log e^{Ju} \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}, \text{ или}$$

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m\sqrt{a_0}} \log \left[e^{mJu} \left\{ \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} \right\}^m \right],$$

гдѣ m цѣлое положительное число

Извѣстно, что

$$e^{mJu} \left\{ \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} \right\}^m$$

выразится рационально черезъ pu и $p'u$ лишь въ томъ случаѣ, когда

$$1) \ v = -\frac{2\tilde{\omega}}{m}, \quad 2) \ J = \frac{2\tilde{\eta}}{m} \quad (^6).$$

Выборъ H , по сущности задачи, зависитъ отъ произвола. Если $v = -\frac{2\tilde{\omega}}{m}$, то возьмемъ

$$H = \frac{2\tilde{\eta}}{m} - \zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) + \frac{a_1}{a_0};$$

(⁵) $\sigma(u)$ есть одна изъ основныхъ эллиптическихъ функций въ доктринѣ Weierstrass'a.

(⁶) Halphen, «Traité des fonc. ellip. e. t. c.», 1886, t. 1 p. Обозначеніе періодовъ $2\tilde{\omega}$ и $2\tilde{\eta}$ можно встрѣтить такъ же

тогда

$$J = \frac{2\tilde{\eta}}{m},$$

а при этомъ значеніи J интеграль

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

выразится посредствомъ логарифмовъ.

И такъ если

$$\alpha_2 = \frac{a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2} = -p \left(\frac{2\tilde{\omega}}{m} \right),$$

то, полагая

$$H = \frac{2\tilde{\eta}}{m} - \zeta \left(\frac{2\tilde{\omega}}{m} \right) + \frac{a_1}{a_0}$$

можно выразить

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

логарифмическою функціею отъ

$$p(u) = z \text{ и } p'u = -\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3},$$

а слѣдовательно и логарифмическою функціею отъ x и $\sqrt{X}$.

§ VI.

Пусть m нечетное число; тогда можно удовлетворить сравненію

$$2^s \equiv 1 \pmod{m}$$

цѣлымъ и положительнымъ s .

Положимъ

$$2^s - 1 = lm, \quad l \text{ цѣлое,}$$

тогда

$$2^s. \nu = - (lm + 1) \frac{2\tilde{\omega}}{m}, \text{ или}$$

$$2^s. \nu = - 2l\tilde{\omega} - \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

слѣдовательно

$$p(2^s. \nu) = p\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) = p(\nu)$$

Отсюда видно, что, удваивая аргументъ послѣдовательно s разъ, дойдемъ до того, что

$$\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) p(2^s. \nu) = \alpha_s$$

приобрѣтеть первоначальную величину

$$p(\nu) = -\alpha_s.$$

Теперь положимъ, что m четное; тогда можно взять

$$m = 2^i. n,$$

гдѣ n нечетное.

Удваивая аргументъ

$$\nu = - \frac{2\tilde{\omega}}{m}$$

послѣдовательно i разъ, найдемъ

$$2^i. \nu = - \frac{2\tilde{\omega}}{n} = \nu_1.$$

Положимъ

$$2^k - 1 = nl;$$

имѣемъ

$$2^k. \nu_1 = - (nl + 1) \frac{2\tilde{\omega}}{n},$$

$$p(2^{i+k}. \nu) = p(\nu_1).$$

Отсюда слѣдуетъ, что, удваивая аргументъ

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m}$$

последовательно $(i+k)$ разъ, найдемъ

$$p(2^{i+k} \cdot v) = p(2^i \cdot v).$$

И такъ если интеграль

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

выражается посредствомъ логариѳмовъ, то, удваивая аргументъ v , опредѣляемый уравненіемъ

$$p(v) = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2},$$

мы непремѣнно найдемъ

$$p(2^s \cdot v) = p(v),$$

или

$$p(2^{i+k} v) = p(2^i \cdot v).$$

Легко доказать, что обратная теорема также справедлива. Въ самомъ дѣлѣ изъ условія

$$p(2^s \cdot v) = p(v)$$

имѣемъ

$$2^s \cdot v = v \pm 2\tilde{\omega},$$

откуда

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{2^s - 1} = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m}.$$

Равнымъ образомъ изъ условія

$$p(2^{i+k} \cdot v) = p(2^i \cdot v)$$

имѣемъ

$$2^{i+k} \cdot v = 2^i \cdot v \pm 2\tilde{\omega},$$

откуда

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{2^i(2k-1)} = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

а въ § V было доказано, что, если

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

то интеграль

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

выражается посредствомъ логарифмовъ.

§ VII.

Въ § II мы преобразовали многочленъ

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

въ новый многочленъ

$$X_1 = \alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)x_1^3 - 12\alpha_2\alpha_1 x_1^2 + 4x_1$$

и получили

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}.$$

Поступимъ съ X_1 точно также, какъ раньше поступали съ X .

Для этого положимъ

$$x_1 = \frac{\alpha_4 - 9\alpha_2^2}{4\alpha_3^2} + \xi_1;$$

будемъ имѣть

$$X_1 = \alpha_3^2 \left\{ \xi_1^4 + 6\beta_2 \xi_1^2 + 4\beta_3 \xi_1 + \beta_4 \right\},$$

гдѣ коэффициенты $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ составлены изъ коэффициентовъ полинома X_1 точно также, какъ $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — изъ коэффициентовъ полинома X ; слѣдовательно

$$\beta_2 = -\frac{2\alpha_2\alpha_3^2 + \frac{1}{16}(9\alpha_2^2 - \alpha_4)^2}{\alpha_3^4} = -\frac{32\alpha_2\alpha_3^2 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^2}{16\alpha_3^4}$$

Вычислимъ теперь $p(2v)$ по формулѣ удвоенія аргумента. Имѣемъ

$$\begin{aligned} p(2v) &= -2pv + \frac{1}{4}\left(\frac{2p''v}{2p'v}\right)^2 = \\ &= -2pv + \frac{1}{4}\left(\frac{12p^2v - g_2}{2p'v}\right)^2 = \\ &= 2\alpha_2 + \frac{1}{16}\alpha_3^{-2}(12\alpha_2^2 - \alpha_4 - 3\alpha_2^2)^2 = \\ &= \frac{32\alpha_2\alpha_3^2 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^2}{16\alpha_3^2} \end{aligned}$$

Вычисленіе показываетъ, что

$$p(2v) = -\alpha_3^2\beta_2.$$

Вычислимъ теперь $p'(2v)$ и β_3 .

Имѣемъ

$$p'(2v) = -p'v + \frac{1}{4}\frac{p''v}{p'v}\left\{\frac{p'''v}{p'v} - \left(\frac{p''v}{p'v}\right)^2\right\}$$

Изъ уравненія

$$p'^2v = 4p^3v - g_2pv - g_3,$$

чрезъ послѣдовательное дифференцированіе, находимъ

$$2p''v = 12p^2v - g_2,$$

$$p'''v = 12pv p'v,$$

гдѣ H неопредѣленное, и нужно рѣшить вопросъ о выразимости интеграла посредствомъ логарифмовъ, то можно поступить двояко:

1) Разыскавъ многочленъ

$$\Psi = \xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4,$$

найдемъ

$$-\alpha_2 = p\nu, \quad \alpha_3 = p'\nu, \quad g_2 = 3\alpha_2^2 + \alpha_4, \quad g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2;$$

по формуламъ удвоения аргумента вычислимъ послѣдовательно

$$p(2\nu), p(4\nu), p(8\nu), \dots$$

$$p'(2\nu), p'(4\nu), p'(8\nu), \dots;$$

если окажется, что ряды эти періодическіе, то можно выбрать H подъ условіемъ, чтобы интеграль

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

выражался одними логарифмами; при чемъ безразлично: будетъ ли періодъ начинаться членомъ $p(\nu)$ или какимъ нибудь другимъ членомъ $p(2^k\nu)$.

2) Составивши рядъ многочленовъ

$$X, X_1, X_2, \dots,$$

вычислимъ ряды количествъ

$$\alpha_2, \alpha_3^2\beta_2, \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_2, \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\delta_2, \dots$$

$$\alpha_3, -\alpha_3^3\beta_3, \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3, -\alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\delta_3, \dots$$

Если эти ряды окажутся періодическими, то интеграль

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

выражается, въ конечномъ видѣ, посредствомъ логарифмовъ.

§ VIII.

Въ § II, совершая инверсію эллиптического интеграла, мы видѣли, что, если взять

$$-\alpha_2 = p(v, g_2, g_3), \text{ то}$$

$$\alpha_3 = p'(v, g_2, g_3);$$

а въ § VII мы нашли

$$2p''v = 9\alpha_2^2 - \alpha_4 = 9p^2v - \alpha_4,$$

откуда

$$\alpha_4 = 9p^2v - 2p''v.$$

Посредствомъ преобразованія мы замѣнили полиномъ

$$X_1 = \alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1$$

полиномомъ

$$X_2 = \beta_3^2 x_2^4 + (9\beta_2^2 - \beta_4)x_2^3 - 12\beta_2 x_2^2 + 4x_2,$$

при чемъ оказалось, что

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}$$

Если взять за основной эллиптическій аргументъ

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}$$

и положить

$$-\beta_2 = p(v_1),$$

то окажется

$$\beta_3 = p'(v_1),$$

$$\beta_4 = 9p^2(v_1) - 2p''(v_1).$$

Если теперь перейти къ аргументу

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3} \int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

т. е. къ инвариантамъ g_2, g_3 , то v_1 обратится въ $2v, \beta_2$ въ $\alpha_3^2 \beta_2, \pm \beta_3$ обратится въ $\pm \alpha_3^3 \beta_3$; тогда, очевидно, β_4 умножится на α_3^4 , и мы получимъ

$$\alpha_3^4 \beta_4 = 9p^2(2v) - 2p''(2v).$$

Отсюда слѣдуетъ, что, вслѣдствіе преобразованій, мы получимъ еще третій періодическій рядъ

$$\alpha_4, \alpha_3^4 \beta_4, \alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_4, \alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_3^4 \delta_4, \dots,$$

если только интеграль

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

выражается посредствомъ логарифмовъ.

И такъ условіе выразимости нашего интеграла въ логарифмахъ заключается въ томъ, чтобы ряды

$$\alpha_2, \alpha_3^2 \beta_2, \alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_2, \alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_3^2 \delta_2, \dots$$

$$\alpha_3, -\alpha_3^3 \beta_3, \alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3, -\alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3^3 \delta_3, \dots$$

$$\alpha_4, \alpha_3^4 \beta_4, \alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_4, \alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_3^4 \delta_4, \dots$$

были одновременно періодическіе.

§ IX.

Положимъ, что оказалось

$$\alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_3^2 \delta_3^2 \dots \pi_3^2 \varrho_2 = \alpha_2,$$

$$\alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3^3 \delta_3^3 \dots \pi_3^3 \varrho_3 = \alpha_3,$$

$$\alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_3^4 \delta_3^4 \dots \pi_3^4 \varrho_4 = \alpha_4.$$

Посредствомъ ряда преобразованій мы найдемъ

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = \frac{1}{\alpha_3 \beta_3} \frac{dx_3}{\sqrt{X_3}} = \dots = \frac{1}{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \dots \pi_3} \cdot \frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}},$$

$$\frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}} = \frac{d\xi_n}{\sqrt{\Psi_n}},$$

гдѣ

$$\Psi_n = \xi_n^4 + 6\rho_2 \xi^2 + 4\rho_3 \xi + \rho_4.$$

Положимъ

$$\xi_n = \frac{\eta}{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \dots \pi_3},$$

тогда

$$\Psi_n = \frac{1}{\alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_3^4 \dots \pi_3^4} \left\{ \eta^4 + 6\alpha_3^2 \beta_3^2 \dots \pi_3^2 \rho_2 \eta^2 + 4\alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3^3 \dots \pi_3^3 \rho_3 \eta + \right. \\ \left. + \alpha_3^4 \beta_3^4 \dots \pi_3^4 \rho_4 \right\},$$

или

$$\sqrt{\Psi_n} = \frac{1}{\alpha_3^2 \beta_3^2 \dots \pi_3^2} \sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2 \eta^2 + 4\alpha_3 \eta + \alpha_4},$$

отсюда

$$\frac{\partial \xi_n}{\sqrt{\Psi_n}} = \pm \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \dots \pi_3 \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2 \eta^2 + 4\alpha_3 \eta + \alpha_4}},$$

слѣдовательно

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2 \eta^2 + 4\alpha_3 \eta + \alpha_4}}.$$

Полагая

$$\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2 \eta^2 + 4\alpha_3 \eta + \alpha_4} = (\eta^2 + 3\alpha_2) - \frac{2}{y},$$

получимъ (§ II)

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

гдѣ

$$Y = \alpha_3^2 y^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4) y^3 - 12\alpha_2 y^2 + 4y,$$

т. е. многочлены X_1 и Y будутъ отличаться только пере-
мѣнною.

И такъ если интегралъ

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

можетъ выразиться въ логарифмахъ, то посредствомъ ряда преобразований мы должны получить

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = \frac{1}{\alpha_3 \beta_3} \frac{dx_3}{\sqrt{X_3}} = \dots = \frac{1}{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \dots \pi_3} \frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

гдѣ конечный многочленъ обладаетъ тѣми-же коэффициентами, какъ и начальный. Ясно, что

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} + C.$$

Называя

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = q,$$

получимъ

$$y = F(q), \quad x_1 = F(q + C),$$

а такъ какъ выборъ постоянной зависитъ отъ насъ, то, взявъ $C=0$, получимъ

$$x_1 = y.$$

§ X.

По формуламъ § II имѣемъ

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \xi = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{\alpha_3 x_1}{2} - \frac{1}{2x_1} \sqrt{X_1},$$

слѣдовательно

$$(a) \int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}} = p_1 \log x_1 + \int \frac{(a_1 H + b_1 + c_1 x_1)dx}{\sqrt{X_1}},$$

гдѣ p_1, a_1, b_1, c_1 данныя числа.

Ясно, что мы еще получимъ рядъ уравненій

$$(б) \int \frac{(a_1 H + b_1 + c_1 x_1) dx_1}{\sqrt{X_1}} = p_2 \log x_2 + \int \frac{(a_2 H + b_2 + c_2 x_2) dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

$$(в) \int \frac{(a_2 H + b_2 + c_2 x_2) dx_2}{\sqrt{X_2}} = p_3 \log x_3 + \int \frac{(a_3 H + b_3 + c_3 x_3) dx_3}{\sqrt{X_3}},$$

.....

Наконецъ получимъ

$$\int \frac{(a_n H + b_n + c_n x_n) dx_n}{\sqrt{X_n}} = p_{n+1} \log x_{n+1} + \int \frac{(a_{n+1} H + b_{n+1} + c_{n+1} x_1) dx_1}{\sqrt{X_1}}$$

Выбирая H подѣ условіемъ

$$c_{n+1} a_1 H + c_{n+1} b_1 = c_1 a_{n+1} H + c_1 b_{n+1},$$

дадимъ послѣднему уравненію видъ.

$$(л) \int \frac{(a_n H + b_n + c_n x_n) dx_n}{\sqrt{X_n}} = p_{n+1} \log x_{n+1} + \frac{c_{n+1}}{c_1} \int \frac{(a_1 H + b_1 + c_1 x_1) dx_1}{\sqrt{X_1}}$$

Изъ уравненій (б), (в) (л) опредѣлимъ

$$\int \frac{(a_1 H + b_1 + c_1 x_1) dx_1}{\sqrt{X_1}};$$

подставивши результатъ въ ур. (а), рѣшимъ задачу окончательно. Мы не будемъ останавливаться на разсмотрѣніи того случая, когда въ рядахъ § VIII періодъ начинается не съ перваго члена, ибо случай этотъ ясенъ самъ по себѣ.

§ XI.

Для поясненія теоріи заимствую два примѣра изъ мемуара Абеля „sur l'intégration de la formule differentielle

$\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, ϱ et R etant des fonctions entières“ ⁽⁶⁾.

⁽⁶⁾ Эти-же примѣры приводятся въ сочиненіи г. И. Пташицкаго «Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ», 1888, Спб.

1) Дается интегралъ

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{x^4+4x^3+8x^2+12x+8}}$$

$$X=x^4+4x^3+8x^2+12x+8;$$

$$Y=\xi^4+2\xi^2+4\xi+1; \quad \alpha_2=\frac{1}{3}; \alpha_3=1; \alpha_4=1,$$

$$X_1=x_1^4-4x_1^2+4x_1; \quad \beta_2=-\frac{2}{3}; \beta_3=1; \beta_4=0,$$

$$X_2=x_2^4+2x_2^2-4x_2+1; \quad \gamma_2=\frac{1}{3}; \gamma_3=-1; \gamma_4=1,$$

$$X_3=x_3^4-4x_3^2+4x_3; \quad \delta_2=-\frac{2}{3}; \delta_3=1; \delta_4=0,$$

$$X_4=x_4^4+2x_4^2-4x_4+1; \quad \varepsilon_2=\frac{1}{3}, \varepsilon_3=-1; \varepsilon_4=1.$$

Составляемъ ряды § VIII:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{3}, & -\frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & -\frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & \dots\dots\dots \\ 1, & -1, & -1, & 1, & 1, & \dots\dots\dots \\ 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & \dots\dots\dots \end{array}$$

Изъ этихъ рядовъ видно, что

$$p\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) = p\left(2^4 \cdot \frac{2\tilde{\omega}}{m}\right),$$

слѣдовательно

$$2^4 \equiv 1(\text{mod}.m),$$

откуда

$$m=5.$$

Полагая

$$x_4 = \frac{1}{\alpha_3\beta_3\gamma_3\delta_3} \eta = -\eta,$$

преобразуемъ многочленъ X_4 въ новый

$$\eta^4+2\eta^2+4\eta+1,$$

тождественный съ многочленомъ Ψ , что согласно съ доказанною теоремою (§ IX). Ясно, что данный интегралъ, при нѣкоторомъ значеніи H , выражается въ логариѣмахъ.

2) Имѣемъ интегралъ

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}$$

Получаемъ

$$X = x^4 + x^2 + x + \frac{1}{4}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{4},$$

$$X_1 = x_1^4 - 32x_1^2 + 64x_1; \quad \beta_2 = -\frac{16}{3}, \quad \beta_3 = 16; \quad \beta_4 = 0,$$

$$X_2 = x_2^4 + x_2^3 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{64}x_2,$$

$$\Psi_2 = \xi_2^4 - \frac{1}{8}\xi_2^2 + \frac{1}{64}\xi_2; \quad \gamma_2 = -\frac{1}{48}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{256}, \quad \gamma_4 = 0;$$

Составляемъ ряды § VIII:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \dots, \\ & \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad \dots, \\ & \frac{1}{4}, \quad 0, \quad 0, \quad \dots; \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$p(4\nu) = p(2\nu),$$

слѣдовательно

$$4\nu = \pm 2\nu + 2\tilde{\alpha};$$

первое рѣшеніе

$$\nu = \tilde{\alpha}$$

негодится, ибо тогда имѣли-бы

$$p'(\nu) = 0,$$

слѣдовательно

$$\nu = \frac{2\tilde{\omega}}{6}, \quad m = 6.$$

§ XII.

Надлежитъ разобрать еще одинъ случай, когда

$$\nu = -\frac{2\tilde{\omega}}{2k}.$$

Въ этомъ случаѣ, удваивая аргументъ $(k-1)$ разъ, получимъ

$$2^{k-1} \cdot \nu = -\tilde{\omega},$$

а такъ какъ

$$p'(\tilde{\omega}) = 0,$$

то въ ряду чиселъ

$$\alpha_3, \alpha_3^3 \beta_3, \alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3, \dots$$

найдется одно, равное нулю; другими словами — въ ряду коэффициентовъ

$$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3, \dots$$

будетъ одинъ, равный нулю.

И такъ если въ ряду многочленовъ

$$\Psi = \xi^4 + 6\alpha_3 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4,$$

$$\Psi_1 = \xi_1^4 + 6\beta_3 \xi_1^2 + 4\beta_3 \xi_1 + \beta_4$$

$$\dots$$

последній будетъ вида

$$\Psi_n = \xi_n^4 + 6\pi_2 \xi_n^2 + \pi_4,$$

то интеграль

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

выражается въ логариѣмахъ. Этотъ выводъ настолько ясенъ, что не требуетъ никакихъ развитій.

Настоящее изслѣдованіе показываетъ, что, если интегралъ

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{X}}$$

принадлежитъ къ категоріи *псевдо-эллиптическихъ*, то вопросъ будетъ рѣшенъ, въ утвердительномъ смыслѣ, послѣ ряда преобразованій. Но методъ нашъ неприложимъ для рѣшенія отрицательнаго вопроса: о непринадлежности даннаго интеграла къ категоріи *псевдо-эллиптическихъ*, въ томъ случаѣ, когда интегралъ не выражается въ логариѣмахъ.

Первыя работы для рѣшенія этой трудной задачи принадлежатъ *Чебышеву*, а вслѣдъ за нимъ *Золотареву*. Результаты, полученные нашими геометрами связываютъ теорію *псевдо-эллиптическихъ* интеграловъ съ Теоріей Чиселъ.

то т. е. во второй части логарифма $\log \frac{1}{\sqrt{a}}$, где

$$\log \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1+2i}$$

и в логарифме отбрасывается действительная часть, то получим в последней формуле вместо выражения

$$\log \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1+2i}$$

выражение $\log \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1+2i}$, или — т. е. — $\log \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1+2i}$ — что означает отрицательную величину, так как логарифм от отрицательного числа не существует, что

$$\log \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1+2i}$$

на логарифмическом и на арифметическом влечет за собой отрицательное значение. Вроде бы, считая нулевой отрицательное значение, мы то, что, если не брать во внимание

$$\log \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1+2i}$$

возможна, значит, такая, что $\log \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1+2i}$ будет положительным, то ошибка не будет, мы тогда получим не 1-й, а 2-й вид логарифма от отрицательного числа, что не удовлетворяет условию Рундта.

В. Земский

Протоколъ 101-го засѣданія

20 Мая 1890 года.

(Въ засѣданіи присутствовали 20 членовъ).

I. Предсѣдатель доложилъ полученное отъ члена секціи А. П. Павлова письмѣ, въ которомъ г. Павловъ проситъ секцію раздавать препровожденныя при письмѣ „таблицы для извлеченія квадратнаго и кубичнаго корня“ въ количествѣ 300 экз., на Казанской научно-промышленной выставкѣ учителямъ народныхъ школъ и ремесленникамъ. Постановлено обратиться отъ имени секціи къ предсѣдателю учебнаго отдѣла Казанской научно-промышленной выставкѣ съ просьбою способствовать распространенію таблицъ г. Павлова между посѣтителями выставки.

II. Д. И. Долбня сдѣлалъ сообщеніе: „разысканіе нормальныхъ періодовъ ультра-эллиптическихъ интеграловъ и опредѣленіе нулевыхъ точекъ функціи $\theta(u_1, u_2, \dots, u_p)$ отъ p нормальныхъ ультра-эллиптическихъ аргументовъ“.

III. Н. П. Слугиновъ сдѣлалъ сообщеніе: „объ ареометрѣ для газовъ“.

IV. Н. П. Слугиновъ сдѣлалъ сообщеніе: „о температурѣ плавленія“. Сообщеніе напечатано въ приложеніи къ протоколамъ.

Предсѣдатель секціи А. Васильевъ.

Секретарь секціи М. Сегель.

Протоколъ 102-го засѣданія

31 Мая 1890 года.

(Въ засѣданіи присутствовало 15 членовъ и около 30 постороннихъ лицъ)

I. Прочитанъ и утвержденъ отчетъ секціи за истекшій десятый годъ ея существованія.

II. Въ виду небольшого числа присутствовавшихъ членовъ и предстоящаго преобразования секціи въ физико - математическое общество постановлено выборы въ администрацію секціи отложить.

III. Рѣшено на будущее время во время засѣданій выставлять для просмотра книги и журналы, полученные за послѣднее время; выдачу же ихъ производить по субботамъ отъ 6—7 часовъ вечера въ помѣщеніи библіотеки секціи.

IV. Я. П. Корнухъ-Троицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Вычисленіе возмущеній малой планеты Діаны для противостоянія Авг. 11 1890 г. Сообщеніе напечатано въ приложеніи къ протоколамъ.

V. Н. П. Слугиновъ указалъ на желательность расширения дѣятельности секціи изданіемъ по примѣру *Repertorium'a der Physik Exner'a* переводовъ выдающихся статей по физико - математическимъ наукамъ и представилъ переводъ статьи Guldberg'a и Mohn'a: „*Études sur les mouvements de l'atmosphère*“, сдѣланный А. Н. Кремлевымъ. Секція, согласившись въ принципѣ съ предложеніемъ Н. П. Слугинова, постановила передать переводъ А. Н. Кремлева для разсмотрѣнія въ Коммиссію изъ Д. А. Гольдгаммера, М. С. Сегеля и Г. Н. Шебуева.

Предсѣдатель секціи А. Васильевъ.

Секретарь секціи М. Сегель.

О Т Ч Е Т Ъ

СЕКЦІИ ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

Общества Естествоиспытателей при Импера- торскомъ Казанскомъ Университетѣ

ЗА ДЕСЯТЫЙ ГОДЪ

(Май 1889—Май 1890 г.).

Составъ секціи физико-математическихъ наукъ значительно увеличился въ истекшемъ десятомъ году ея существованія вступленіемъ двадцати-двухъ новыхъ членовъ.

Приводимъ списокъ новыхъ нашихъ сочленовъ:

1) *Брюсовъ*, Евграфъ Ивановичъ, лаборантъ физическаго кабинета Московскаго университета.

2) *Де-Метизъ*, Георгій Георгіевичъ, приватъ - доцентъ Новороссійскаго университета.

3) *Жарковъ*, Николай Николаевичъ, военный инженеръ въ Казани.

4) *Кадомцевъ*, Петръ Васильевичъ, преподаватель математики въ Новгородскомъ реальномъ училищѣ.

5) *Казинъ*, Борисъ Ниловичъ, канд. математики, инженеръ путей сообщенія.

6) *Кларкъ*, Николай Ивановичъ, преподаватель Нижне-Тагильскаго реального училища.

7) *Кремлевъ*, Александръ Николаевичъ, кандидатъ математики.

8) *Михельсонъ*, Владиміръ Александровичъ, приватъ-доцентъ Московскаго университета.

9) *Назимовъ*, Петръ Сергѣевичъ, профессоръ математики въ Казанскомъ университетѣ.

10) *Перуанскій*, Константинъ Аѳанасьевичъ, преподаватель реального училища въ г. Сызрани.

11) *Пташницкій*, Иванъ Львовичъ, приватъ-доцентъ С.-Петербургскаго университета.

12) *Селивановъ*, Дмитрій Θεодоровичъ, приватъ-доцентъ С.-Петербургскаго университета.

13) *Сикстель*, Владиміръ Александровичъ, преподаватель Оренбургскаго кадетскаго корпуса.

14) *Славолюбовъ*, Павелъ Николаевичъ, учитель гимназіи въ Вяткѣ.

15) *Соколовъ*, Дмитрій Михайловичъ, инженеръ института путей сообщенія.

16) *Толузаковъ*, Василій Васильевичъ, преподаватель Оренбургской мужской гимназіи.

17) *Ульянинъ*, Всеволодъ Александровичъ, докторъ Страсбургскаго университета, лаборантъ физическаго кабинета Московскаго университета.

18) *Хвольсонъ*, Орестъ Даниловичъ, членъ ученаго комитета министерства народнаго просвѣщенія.

19) *Чеховичъ*, Карлъ Андреевичъ, окружный инспекторъ Оренбургскаго учебнаго округа.

20) *Шиффъ*, Вѣра Осиповна, преподавательница математики на высшихъ женскихъ курсахъ въ С.-Петербургѣ.

21) *Щепанскій*, Іосифъ Александровичъ, преподаватель Самарскаго реального училища.

22) *Федоровъ*, *Полиевкъ* *Федоровичъ*, учитель Красно-ярской гимназіи.

Съ радостью отмѣчаемъ постоянно увеличивающееся число членовъ изъ С.-Петербурга, Москвы и др. городовъ, указывающее на увеличивающійся интересъ къ занятіямъ и печатнымъ изданіямъ нашей секціи и внѣ нашего края и позволяемъ себѣ выразить надежду, что наши новые сочлены не откажутся принимать активное участіе въ трудахъ секціи присылкою ей своихъ научныхъ сообщеній и увеличатъ такимъ образомъ число ея дѣятельныхъ членовъ.

Но не одни радостныя явленія приходится отмѣчать въ отчетѣ; съ чувствомъ глубокой скорби должны мы упомянуть о потерѣ секціею двухъ изъ наиболѣе ея дѣятельныхъ членовъ: профессора Казанскаго университета И. С. Громеки и профессора Кіевскаго университета В. П. Максимовича. Секція въ засѣданіяхъ, бывшихъ въ Октябрѣ и Ноябрѣ, выслушала некрологи покойныхъ сочленовъ и постановила почтить память ихъ вставаніемъ. Памяти покойнаго И. С. Громеки, бывшаго вице-предсѣдателя секціи, было посвящено экстренное засѣданіе 9-го Ноября 1889 г., на которомъ Г. Н. Шебуевъ и Д. А. Гольдгаммеръ произнесли рѣчи, посвященные оцѣнкѣ научной дѣятельности покойнаго. Рѣчи эти изданы были особою брошюрою.

Въ настоящее время за вступленіемъ въ члены секціи новыхъ лицъ и за смертію двухъ членовъ общее наличное число членовъ секціи достигаетъ до 182. Дѣятельность секціи и въ настоящемъ отчетномъ году преимущественно состояла въ засѣданіяхъ, на которыхъ выслушивались научныя сообщенія и рефераты, и въ изданіи научныхъ работъ членовъ секціи.

Въ отчетномъ году секція имѣла 14 засѣданій, въ которыхъ было сдѣлано 32 сообщенія 19-ю лицами; приводимъ

алфавитный списокъ лицъ, дѣлавшихъ сообщенія съ указаніемъ заглавій сообщеній.

А. В. Васильевъ.—Чистая математика на VIII-мъ съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей.

Д. А. Гольдгаммеръ—а) Значеніе работъ И. С. Громеки по теоріи капиллярныхъ явленій, б) о международномъ конгресѣ электриковъ въ парижѣ.

П. П. Граве.—Новый способъ изслѣдованія формулы преломленія въ стеклахъ.

И. П. Долбня—а) Объ аналогіи между эллиптическими и тригонометрическими функціями, б) о простѣйшемъ способѣ образованія функціи $\wp(u)$ и другихъ съ нею однородныхъ, с) О псевдоэллиптическихъ интегралахъ Абеля, d) Розысканіе нормальныхъ періодовъ ультра-эллиптическихъ интеграловъ и опредѣленіе нулевыхъ точекъ функціи $\Theta(u_1 \dots u_r)$ отъ r нормальныхъ ультра-эллиптическихъ аргументовъ.

И. И. Зелинскій—Объ интегралѣ уравненія Риккати.

Н. П. Казанкинъ—По поводу опредѣленія коэффициента самоиндукціи.

Г. А. Клейберъ—О наилучшей ординатѣ въ интерполированіи по способу наименьшихъ квадратовъ.

А. П. Котельниковъ—О давленіи жидкой струи на клинъ.

А. Н. Кремлевъ—а) Ходъ барометрическаго давленія въ Казани за 1888 и 1889 годъ, в) рефератъ о новѣйшихъ работахъ по солнечной радіаціи.

Н. А. Миславскій—по поводу статьи проф. Журавскаго „о рефракціи глаза“.

П. С. Назимовъ—а) о сходимости рядовъ, служащихъ интегралами дифференціальныхъ уравненій; б) по поводу одной замѣтки Бертрана по теоріи вѣроятностей.

С. П. Орловъ—О рѣшеніи уравненія 5-й степени съ помощью тригоном. таблицъ.

П. И. Свѣшниковъ—О построеніи изображеній въ преломляющихъ срединахъ.

Д. М. Синцовъ—О Бернулліевыхъ функціяхъ дробныхъ порядковъ.

Н. П. Слугиновъ—а) О дѣятельности магнитной обсерваторіи въ 1888-мъ году, б) о звукопроводности, с) объ ареометрѣ для газовъ, д) о соотношеніи между температурою плавленія и удѣльнымъ объемомъ.

В. А. Сикстель—Объ эвклидовомъ опредѣленіи прямой.

Ф. М. Флавицкій—Элементарный выводъ закона Авогадро-Ампера.

Г. Н. Шебуревъ—а) О движеніи жидкости вблизи нагрѣтыхъ поверхностей, б) о научныхъ трудахъ И. С. Громеки, с) Къ вопросу о распространеніи тепла внутри текущей жидкости.

О. Д. Хвольсонъ—а) Объ опредѣленіи зависимости теплоемкости отъ температуры, б) о распространеніи тепла въ цилиндрахъ, с) объ одномъ частномъ случаѣ переменнаго тепловаго состоянія стержня.

Кромѣ того въ нѣсколькихъ засѣданіяхъ Н. П. Слугиновымъ, К. В. Кебелемъ и К. И. Котеловымъ были демонстрированы новые приборы физич. каб. университета; въ Апрѣльскомъ засѣданіи Ф. М. Флавицкій демонстрировалъ аллотропическія состоянія серебра (золотое и растворимое въ водѣ); въ засѣданіи 17-го Мая гг. Свидерскій и Фиргангъ демонстрировали дѣйствіе фонографа Эдисона въ его новѣйшей конструкціи.

Въ отчетномъ году секція издала послѣдній выпускъ 7-го тома собранія протоколовъ своихъ засѣданій и первые четыре выпуска 8-го тома; въ общемъ 23 печатныхъ листа; кромѣ того съ расширеніемъ бібліотеки явилась необходимость въ изданіи каталога бібліотеки секціи, который и напечатанъ

въ числѣ 300 экземпляровъ и разосланъ въ видѣ приложенія къ протоколамъ. Рѣчи, посвященныя памяти И. С. Громеки, изданы особою брошюрою, которая продается у г. секретаря секціи по 40 к. за экземпляръ. Одобреніемъ трудовъ секціи къ печатанію завѣдывалъ—какъ и въ предыдущіе годы—комитетъ секціи, состоявшій изъ слѣдующихъ лицъ, избранныхъ въ годичномъ засѣданіи 7-го Мая 1889 г. — предсѣдателя секціи А. И. Васильева, вице-предсѣдателя Ѳ. М. Суворова, секретаря М. С. Сегеля, бібліотекаря—Н. П. Казанкина, и членовъ: Д. А. Гольдгаммера, Д. И. Дубяго, И. А. Износкова, І. А. Имшеника, А. К. Жбиковскаго, Н. П. Слугинова и Г. Н. Шебуева.

На долю Комитета секціи въ истекшемъ отчетномъ году выпала по постановленію прошлагодняго годичнаго собранія обязанность составленія „Устава физико-математическаго общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ“; въ работахъ комитета по этому поводу приняли дѣятельное участіе также Д. И. Альбрехтъ и О. Д. Хвольсонъ. Уставъ физико-математическаго общества, составленный на основаніи какъ десяти лѣтняго опыта дѣятельности секціи, такъ и на основаніи имѣвшихся въ распоряженіи комитета уставовъ другихъ ученыхъ Обществъ Россіи, былъ обсуждаемъ нѣскольکو разъ въ засѣданіяхъ секціи и окончательно одобренъ ею въ засѣданіи 4-го Марта 1890 г. Вмѣстѣ съ тѣмъ секція единогласно постановила ходатайствовать передъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія о преобразованіи ея въ вновь учреждаемое физико - математическое общество. Какъ ходатайство, такъ и уставъ были представлены черезъ физико-математическій факультетъ Казанскаго Университета въ совѣтъ тогоже Университета и уставъ общества находится въ разсмотрѣніи Министерства Народнаго Просвѣщенія; есть основаніе думать, что въ одномъ изъ первыхъ засѣданій будущаго

года мы получимъ свѣдѣнія объ его утвержденіи. Такимъ образомъ будущій годъ будетъ первымъ годомъ существованія новаго физико - математическаго общества. Смѣемъ надѣяться, что новое общество, сохранивши всѣ лучшія традиціи нашей секціи, будетъ въ состояніи проявлять еще большую дѣятельность на пользу науки и просвѣщенія роднаго края, привлекая какъ бѣльшее число научныхъ силъ, такъ и бѣльшія матеріальныя средства.

Въ настоящее время денежныя средства секціи находятся въ слѣдующемъ положеніи, которое можно въ общемъ назвать лучшимъ, чѣмъ въ послѣдній годъ:

Въ кассу секціи въ истекшемъ году поступило:

Членскихъ взносовъ	278 р. ¹⁾
Отъ продажи изд. секціи.	5 р. 70 к.
% съ двухъ 50 р. облигацій	4 р. 75 к.
Субсидія отъ Общества Естествоиспытателей на 1890 годъ	100 р.

Итого въ приходѣ. 388 р. 45 к.

Въ теченіи года издержано:

Типографскіе расходы.	318 р. 30 к.
Почтовые расходы	3 р.
Мелкіе расходы	6 р. 75 к.
На выписку журналовъ	17 р. 90 к.

Всего въ расходѣ. 345 р. 95 к.

Излишекъ прихода надъ расходомъ 42 р. 50 к.

Въ началѣ года въ кассѣ секціи состояло 80 р. 78 к. наличными деньгами и двѣ 50 р. облигаціи; слѣдовательно въ настоящій моментъ въ кассѣ имѣется 123 р. 28 к. на-

¹⁾ Въ томъ числѣ: за отчетный годъ 142 р., за предыдущій 90 р., за 87—88 14 р., за 86—87 9 р., за 85—86 6 р.; за будущій годъ: 18 р.

личными деньгами и двѣ 50 р. облигаціи (за которыя заплачено 99 рублей).

Библіотека секціи, о изданіи каталога которой было упомянуто выше, помѣщается въ настоящее время въ кабинетѣ физической географіи и открыта для пользованія книгами по субботамъ отъ 6 до 7 вечера. Въ теченіе года она увеличилась, благодаря пожертвованіямъ членовъ секціи на 64 названія. Періодическія изданія получались въ количествѣ 23 названій.

Списокъ книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ отчетномъ году, составленный библіотекаремъ Н. П. Казанкинымъ, помѣщается въ приложеніи къ отчету.

Предсѣдатель секціи *А. Васильевъ.*

Секретарь секціи *М. Сегель.*

**Изданія физико-математической секціи Общества Естество-
испытателей при Казанскомъ университетѣ.**

- 1) Собраніе протоколовъ, томъ 1-й, цѣна 2 р.
 - 2) Тоже, томъ 2-й, цѣна съ кабинетнымъ портретомъ Н. И. Лобачевскаго 2 р., безъ портрета 1 р. 75 к.
 - 3) Тоже, томъ 3-й; цѣна: съ кабинетнымъ портретомъ М. А. Ковальскаго 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50 к.
 - 4) Тоже, томъ 4-й; цѣна 1 р. 50 к.
 - 5) Тоже, томъ 5-й; цѣна: съ кабинетнымъ портретомъ П. И. Котельникова 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50 к.
 - 6) Тоже, томъ 6-й; цѣна 1 р. 50 к.
 - 7) Тоже, томъ 7-й; цѣна 1 р. 50 к.
 - 8) Тоже томъ 8-й цѣна съ кабинетнымъ портретомъ И. С. Громеки 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50 к.
 - 9) Брошюра «М. А. Ковальскій» съ кабинетн. портретомъ; ц. 60 к.
 - 10) Брошюра «П. И. Котельниковъ»; цѣна съ кабинетнымъ портретомъ 50 к., безъ портрета 30 к.
 - 11) Каталогъ библіотеки секціи; цѣна 25 к.
 - 12) Брошюра «И. С. Громеки; цѣна съ кабинетнымъ портретомъ 60 к., безъ портрета 30 к.
 - 13) Уставъ физико - математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ. Ц. 5 к.
 - 14) Отчетъ о дѣятельности секціи физико-математическихъ наукъ за 1889—90 г. Ц. 10 к.
-